Opakování: Definice:

- Buď $(A, \leq)$ ČUM. Funkci (= zobr.) $f : A \to A$ nazýváme **neklesající** $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x, y \in A : x \leq y \to f(x) \leq f(y)$.

- $(A, \leq)$ je **úplný svaz**, jestliže $\forall \emptyset \neq B \subseteq A \; \exists i, s \in A : i = \inf B \wedge s = \sup B$.

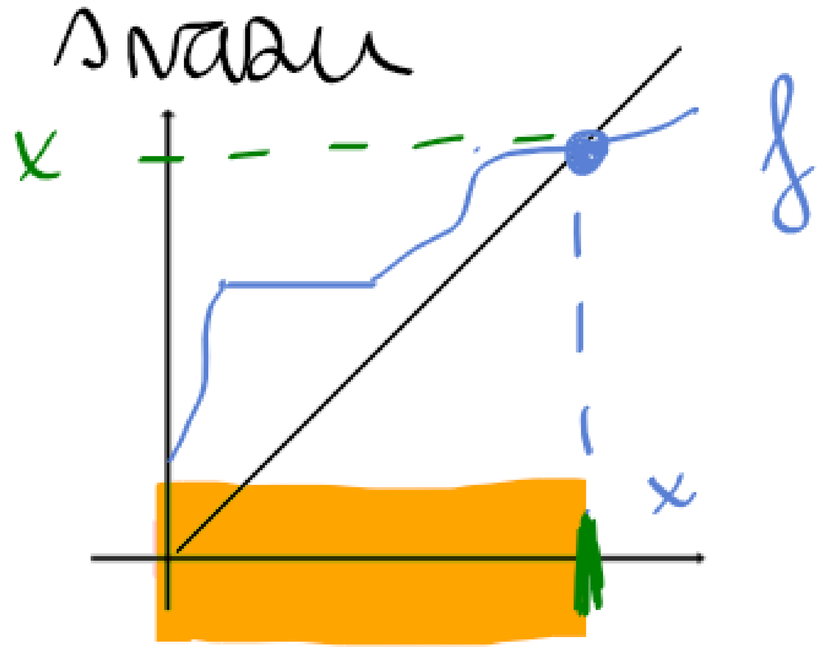
Víme: $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ je úplný svaz.

- Buď $f : X \to X$ funkce, $x \in X$.

Pokud $f(x) = x$, je x **pevný bod fce f**.

Věta: neklesající fce na úplném svazu má pevný bod.

Pevný bod: $f(x) = x$



Důkaz: • $(A, \leq)$ je ú.s., $f : A \to A$ neklesající.

- A je ú.s. $\implies \exists a \in A : a = \inf A$.

Tedy $a = \min A$ (protože $a \in A$).

- $f(a) \in A$ ($\mathrm{Rng}(f) \subseteq A$ podle předp.)
- Tedy $a \leq f(a)$ (neboť $a = \min A$).
- $B := \{ b \in A : b \leq f(b) \} \ni a$,

a tedy $B \neq \emptyset$.

- $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, A je ú.s. $\implies$

existuje $u := \sup B$.

- **Tvrdím**: $f(u) = u$. **Dk**:
  - $f(u)$ je horní závora B: [Skutečně,

$\forall b \in B : \; b \leq f(b) \leq f(u)$

def. B f je neklesající!

$u = \sup B \Rightarrow b \leq u$

Tedy $f(u)$ je h. z. B.

- Protože $u = \sup B$ je nejmenší h. z., musí platit $u \leq f(u)$.
- Kdyby (pro spor) $u < f(u)$, pak (z toho že f je neklesající) $f(u) \leq f(f(u))$.

Tedy podle def. B jest $f(u) \in B$.

Ale $f(u) > u = \sup B$. ↯.

Tedy neplatí $u < f(u)$. Tedy $u = f(u)$. Tj. u je p.b. fce f. $\boxtimes$

Pozn.: Chybný argument: $\neg(f(u) > u) \longrightarrow f(u) \leq u$. v nelin. usp. obecně neplatí

Máme ale i $f(u) \geq u$ $\Rightarrow f(u) = u$ ze slabé antisymetrie $\leq$. $\square$

Porovnávání množin podle velikosti

„Velikost ≡ počet prvků"

- stejně prvků: ex. bijekce prosté zobr.
- méně nebo stejně prvků: ex. injekce

Definice (subvalence):

- $x \preccurlyeq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f : f: x \to y$ prosté.

Pozn.: $\preccurlyeq$ je relace na „universu množin"

- reflexivní: $\forall x : x \preccurlyeq x$. (identita)
- tranzitivní: $\forall x, y, z : x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z$.

$\ulcorner x \preccurlyeq y$, tj. $\exists f : x \to y$ prosté
$y \preccurlyeq z$, tj. $\exists g : y \to z$ prosté.
Pak $g \circ f : x \to z$ prosté (Cv.) $\lrcorner$

- neplatí slabá antisymetrie
$(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \;\cancel{\to}\; x = y)$
(Sami najděte příklady.)

Tedy $\preccurlyeq$ není uspořádání.

Definice (Ekvipotence)

- $x \approx y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f : f: x \to y$ je bijekce

Cvičení: $\approx$ je relace ekvivalence na $\mathbb{V}$ (universu množin).

- $x \prec y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \preccurlyeq y \wedge \neg(x \approx y)$.

Příklady:
- $\{0,1\} \approx \{2,3\} \prec \{0,3,6\}$
- $\{0,0\} \prec \{1,2\}$
- $\mathbb{N} \approx \{n \in \mathbb{N} : n \text{ je sudé}\}$
$n \mapsto 2n : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ je bijekce.

Věta: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \prec \mathbb{R} \approx \mathbb{C} \approx \mathbb{H}$.

Důkaz: – na 1. předn. $\left[\ |\mathbb{R}| = \max\{|\mathbb{Q}|, |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|\} = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \right.$

Věta: (Cantor-Bernstein)

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \longrightarrow x \approx y$$

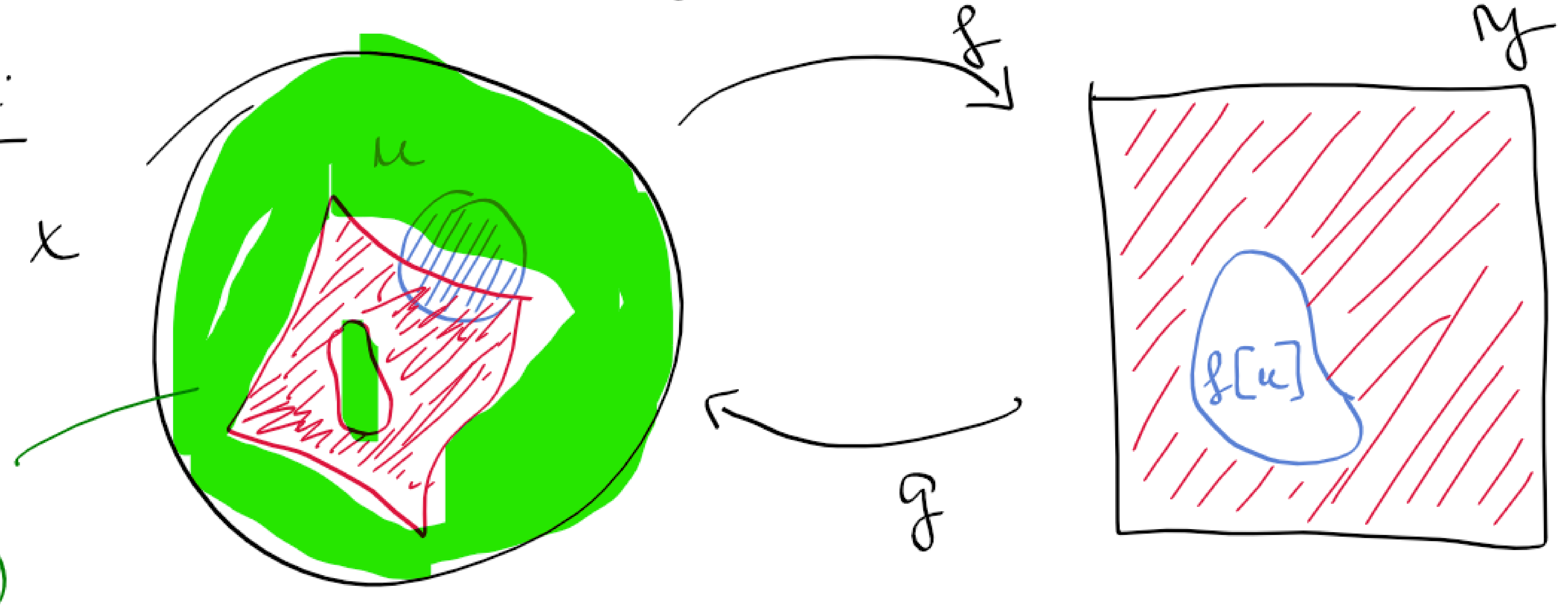
Důkaz: Máme $f: x \to y$, $g: y \to x$ prosté.

Značení: $u \subseteq x$, značíme $f[u] = \{f(a) : a \in u\}$

Položme $H: P(x) \to P(x)$ $\quad (u \in P(x)$, tj. $u \subseteq x)$

$$H(u) = x \setminus g[y \setminus f[u]]$$

Obr:



H má pevný bod: • $(P(x), \subseteq)$ je ú.s. (víme)

• H je neklesající: $a \subseteq b \xrightarrow{?} H(a) \subseteq H(b)$

Zvolme lib. $a, b \in P(x)$, že $a \subseteq b$.

$$a \subseteq b \Longrightarrow f[a] \subseteq f[b] \Longrightarrow$$

$$y \setminus f[a] \supseteq y \setminus f[b] \Longrightarrow$$

$$g[y \setminus f[a]] \supseteq g[y \setminus f[b]] \Longrightarrow$$

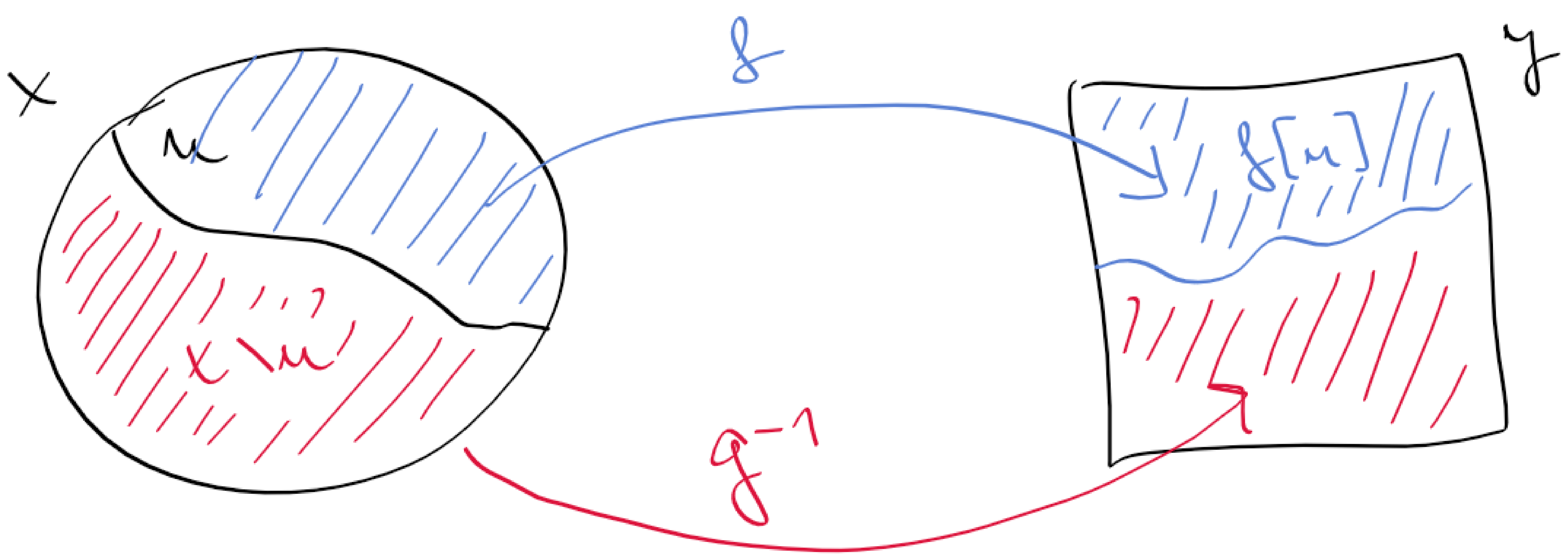
$$\underbrace{x \setminus g[y \setminus f[a]]}_{= H(a)} \subseteq \underbrace{x \setminus g[y \setminus f[b]]}_{= H(b)}.$$

Tj. $H(a) \subseteq H(b)$.

• Podle VoPB $\exists u : H(u) = u$. Definujme

$$h(a) = \begin{cases} f(a), & \text{pokud } a \in u \\ g^{-1}(a), & \text{pokud } a \in x \setminus u. \end{cases}$$

h:



- g^{-1} ex., g je prosté
- $X \setminus M = g[Y \setminus f[M]]$ (neboť $H(M)=M$)

$\Rightarrow g^{-1}$ je def. (a prosté) na $X \setminus M$

f je def. na X, a tedy i na M.

Celkem: h je def. na X.

- h je prosté na M (tam $h = f$)
- h je prosté na $X \setminus M$ (tam $h = g^{-1}$)

Stačí ověřit, že

$$\boxed{\begin{aligned} f[M] \cap g^{-1}[X \setminus M] &= \emptyset \\ f[M] \cup g^{-1}[X \setminus M] &= Y. \end{aligned}}$$

Odvodíme opět z toho, že $H(M)=M$.

$$M = X \setminus g[Y \setminus f[M]]$$

$$X \setminus M = g[Y \setminus f[M]]$$

$$g^{-1}[X \setminus M] = Y \setminus f[M].$$

Snadno.

$\boxtimes$